Q1 : Pourquoi ne pas définir les polynomes comme des fct polynomiales ?

1) les fonctions polynomiales de $A \to A$ (A commutatif) peuvent avoir plusieurs représentation différentes sous forme de polynomes

si $A = \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ p premier

alors $\forall x \in \mathbb{F}_p$ on $x^p - x = 0$

sur $\mathbb{F}_p$ le polynome $X^p - X$ donne les

represente la f fct que le polynome nul

0.

pour éviter cela on définit un polynôme par ses coefficients sous forme d'une suite qui devient identiquement nulle à partir d'un certain rang $P = (a_n)_{n \geq 0}$ $a_n \in A$

avec $a_n = 0_A$ si $n \geq D+1$

et le plus grand entier d tq $a_d \neq 0_A$

est appelé le degré de P (si $P = (0_A)_{n\geq 0}$

on pose $d = -\infty$)

On définit une notation spéciale pour certaines suites :

$X^0 = (1, 0, 0, \dots 0 \dots)$ $a_0 = 1$ $a_n = 0$ $n \geq 1$

$X^1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ $a_0 = 0$ $a_1 = 1$ $a_n = 0$ $n \geq 2$

$$X^d = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots\dots 0 \dots) \quad a_0 = \dots = a_{d-1} = 0$$

$\uparrow$ indice d

$a_d = 1$

$a_n = 0 \quad n \geq d+1$

Notation supplementaires

on pose $1 = X^0$ et $X = X^1$ .....

les X^d $d \geq 0$ forment un famille generatrice du A-module de suites a support fini (des polynomes) toute suite (polynome) P s'écrit de manière unique $P = (a_0, a_1, \dots, a_d, 0, \dots 0)$

$$P = a_0 . X^0 + a_1 . X^1 + \dots + a_d . X^d .$$

Autre interet : un polynome a coefficient dans A peut servir a definir une fct polynomiale pour toute A-algebre contenant A.

Ex: $M_d(A)$ on a une injection

$$A \hookrightarrow A.\mathrm{Id}_d \subset M_d(A)$$
$$a \longrightarrow a.\mathrm{Id}_d \in M_d(A)$$

si $M \in M_d(A)$ $\quad P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$

on definí $P(M) := a_0 \mathrm{Id}_d + a_1 M + \dots + a_n M^n$

Cas principal $A = K$ = corps. CH

Q 2: si V est un K-ev de dim finie

$\varphi : V \to V$ linéaire et tq $\exists\, \psi$ avec

$\varphi \circ \psi = Id_V$ alors φ est inversible

d'inverse $\varphi^{-1} = \psi$ et ψ est linéaire

(où a $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = Id_V$)

__En general__ si $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ et $\dim V = \dim W < \infty$

si $\exists \psi \in \mathrm{Hom}_K(W, V)$ tq $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W$

alors φ est inversible à gauche et à dte

$\varphi^{-1} = \psi \left(\begin{array}{l} \varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_W \\ \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_V \end{array} \right)$

On peut utiliser ses résultats directment en examen sans les justifier

<u>Preuve</u> : $\forall w \in W \quad \varphi(\psi(w)) = w \rightsquigarrow \varphi$ est surj
et donc bijective car

$\dim V = \dim W$

(Rappel par le TNI $\dim \ker \varphi = \dim V - \dim \operatorname{Im} \varphi$
$= \dim V - \dim W$

donc φ est injective donc bijective $\overset{=0}{}$)

Soit φ^{-1} la reciproque de φ alors

on part de $\varphi \circ \psi = Id_W$

on applique φ^{-1} a gauche

$$\varphi^{-1} \circ \varphi \circ \psi = \varphi^{-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \psi = \varphi^{-1} \qquad \square$$

Q3 : Dualité et perp.

V = K-ev de dim $< \infty$

$V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{ \ell : V \to K \text{ linéaires} \}$

$\dim V = \dim V^*$ et donc $V \simeq V^*$

étant donné $\ell \in V^*$ on définit

$$\ell^\perp := \{ v \in V \text{ tq } \ell(v) = 0 \} = \ker(\ell) \subset V$$

étant donné $v \in V$ on définit

$$v^{\perp} := \{ \ell \in V^* \text{ tq } \ell(v) = 0 \} \subset V^*$$

$$v^{\perp} = \ker(ev_v) \text{ où } ev_v : \ell \mapsto \ell(v)$$

Rmq : $ev_v \in \mathrm{Hom}_K(V^*, K) = (V^*)^*$

Plus généralement étant donné

$W^* \subset V^*$ un SEV on définit

$$W^{*\perp} := \{ v \in V \text{ tq } \forall \ell \in W^* \ \ell(v) = 0 \}$$

$$= \bigcap_{\ell \in W^*} \ker(\ell) = \bigcap_{\ell \in \text{base de } W^*} \ker(\ell)$$

et de même si $W \subset V$ on defini

$$W^{\perp} := \{ \ell \in V^* \text{ tq } \forall w \in W \ \ell(w) = 0 \}$$

$$= \bigcap_{w \in W} \ker(ev_w) = \bigcap_{w \in \text{Base de } W} \ker(ev_w)$$

on a $\dim W + \dim W^{\perp} = d$ (Conséquence du TNI)

$$\dim W^{*} + \dim W^{*\perp} = d$$

exemple : si $\ell \neq 0_K$ $\ell^{\perp} = \ker(\ell) = \dim V - 1$
$= d-1$

$$\ell^{\perp} = (K.\ell)^{\perp} \text{ et } K.\ell \text{ de dim } 1$$

$1 + d - 1 = d.$

Rmq: si $B : V \times V \to K$

est la forme bilinéaire défini par le produit scalaire usuel

$$B(v, v') = x_1 . x'_1 + \dots + x_d . x'_d$$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_d e_d$$

$$v' = x'_1 e_1 + \dots + x'_d . e_d$$

on peut associe a chaque

vecteur $v' \in V$ une forme linéaire

$$B(\bullet, v') : v \longrightarrow B(v, v')$$

on a une application $V \longrightarrow V^*$

$$v' \longrightarrow B(\bullet, v')$$

qui est un isomorphisme linéaire

$\rightsquigarrow$ on peut identifier V^* avec V

et les notion d'orthogonalite coincident.
sous cette identification.

Q4: Indépendance linéaire de fcts évaluées en des points convenables.

si on a 4 fonctions alors l'évaluation en 4 pts en position générale est suffisante pour l'indep linéaire

"Général" dépend du contexte (symétries des fcts)

Ex : si les fcts sont periodique de periode 1 les 4 points doivent être $\neq$ modulo 1.

- Si on a des pts egaux parmi les 4 pts on peut également deriver en ces pts ayant des multiplicité.

$\varphi \circ \psi = Id_W$ alors

φ est surjective et donc bijective par egalite des dims.

et $\varphi^{-1} = \psi$. et $\psi \circ \varphi = Id_V$

Principe Genéral:

- En général si on dispose de n vecteurs qu'on veut montrer lin indépendant on doit les évaluer sur au moins n formes linéaires (linéairement indep): on aura une application linéaire

$$\vec{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_n) : V \longrightarrow K^n$$
$$v \longmapsto (\ell_1(v), \dots, \ell_n(v))$$

soit $W = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$ (on veut mq W et de dim n)

si $\vec{\ell}$ restreinte à W est surjective on aura le résultat (car $\dim V \geq n$)

pour cela il suffit que les restriction de $l_i{}_{|W}$ soient linéairement indep.

On le "voit" concrètement par l'annulation d'une CL des vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ qui donne le vecteur nul.

Q6 : $(\varphi^*)^* = \varphi$?

$\varphi : V \to W \quad \varphi^* : W^* \to V^*$

et a priori $(\varphi^*)^* : (V^*)^* \longrightarrow (W^*)^*$

on sait que $(V^*)^*$ est canoniquement isomorphe à V :

l'isomorphisme étant

$$v \in V \longrightarrow ev_v \in (V^*)^* \text{ avec}$$

$$ev_v(\ell) = \ell(v)$$

et du coup on peut identifier V à $(V^*)^*$

et alors $(\varphi^*)^* : (V^*)^* \longrightarrow (W^*)^*$

$$\begin{array}{ccc} (V^*)^* & & (W^*)^* \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ V & \longrightarrow & W \end{array}$$

n'est autre que $\varphi : V \longrightarrow W$

Preuve : $\varphi : v \in V \longrightarrow \varphi(v) = w \in W$

$$\varphi^* : l_W \in W^* \longrightarrow \varphi^*(l_W) = l_W \circ \varphi \in V^*$$

$$l_W \circ \varphi : v \longrightarrow l_W(\varphi(v))$$

$$(\varphi^*)^* : (V^*)^* \longrightarrow (W^*)^*$$

On a $(V^*)^* = \{ ev_v : l \mapsto l(v) \quad v \in V \}$

(car $v \in V \to ev_v \in (V^*)^*$ est un isomorphisme)

Deⁿ $(W^*)^* = \{ ev_w, \ l_w \in W^* \to l_w(w) \}$

Mq $\quad (\varphi^*)^* (ev_v) = ev_{\varphi(v)} \in (W^*)^*$

Cela nous dira que si on identifie V à $(V^*)^*$ et W à $(W^*)^*$ en identifiant v avec ev_v et w avec ev_w alors $\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ (W^*)^*}}{(\varphi^*)^*(ev_v)}$ est identifié avec $ev_{\varphi(v)}$

$(\varphi^*)^*(ev_v)$ est une forme linéaire sur W^*

$$(\varphi^*)^*(ev_v) : l_W \in W^* \longrightarrow (\varphi^*)^*(ev_v)(l_W)$$

Soit $l_W \in W^*$ on a par déf de $*$

$$(\varphi^*)^*(ev_v)(l_W) = (ev_v \circ \varphi^*)(l_W)$$
$$= ev_v(\varphi^*(l_W))$$

On a $\varphi^*(l_W) = l_W \circ \varphi$

et donc $ev_V(\varphi^*(l_W)) = ev_V(l_W \circ \varphi)$

$$= (l_W \circ \varphi)(v)$$

$$= l_W(\varphi(v))$$

$$= e_{\varphi(v)}(l_W)$$

On a donc mq $\forall v \in V$

$$(\varphi^*)^*(ev_v) = ev_{\varphi(w)}$$

On peut resumer cela dans le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
v \in V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_\bullet"', "\wr"] & \varphi(v) \in W \arrow[d, "\mathrm{ev}_\bullet", "\wr"'] \\
\mathrm{ev}_v \in (V^*)^* \arrow[r, mapsto, "(\varphi^*)^*"] & \mathrm{ev}_{\varphi(v)} \in (W^*)^*
\end{tikzcd}
$$